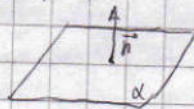


# MECÂNICA DOS SÓLIDOS

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$\frac{a \cdot \frac{b}{2}}{c} = \frac{\frac{a \cdot b}{2}}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{c} \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} = \frac{a \cdot b}{c \cdot 2}$$

Normal a um plano:

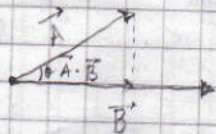


$$\alpha: f(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n}: \{a, b, c\} \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\{a, b, c\}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \|\hat{n}\| = 1$$

Produto escalar ( $A \cdot B$  ou  $A|B$ ):

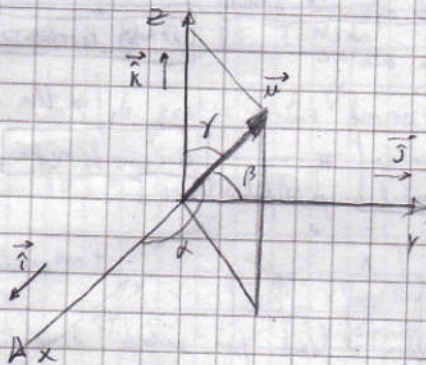
$$\textcircled{1} \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\alpha = \text{escalar}$$



$$\textcircled{2} \vec{A} = \{a, b, c\} \quad \vec{B} = \{d, e, f\} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = ad + be + cf = \text{escalar}$$

ou produto interno

Cossenos diretores (de um plano):



$\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os ângulos que o vetor  $\vec{n}$  faz com os eixos coordenados, chamados de ângulos diretores

$$l = \cos\alpha \quad m = \cos\beta \quad n = \cos\gamma$$

são os cossenos diretores do vetor

além disso,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

São úteis qdo precisamos de definir uma direção em 3D

se o vetor for normalizado, i.e., se for um vetor unitário (versor)

ou se divide pelo norma

Portanto, p/ um vetor qualquer os 3 cossenos diretores são:

$$l = \cos\alpha = \frac{\vec{V}_x}{\|\vec{V}\|}; \quad m = \cos\beta = \frac{\vec{V}_y}{\|\vec{V}\|}; \quad n = \cos\gamma = \frac{\vec{V}_z}{\|\vec{V}\|}$$

Podemos depois agrupá-los num versor (digamos " $\hat{n}$ ")

$$\vec{n} = \{l, m, n\}^T \quad \text{para se usar o cálculo de matrizes}$$

Vetor Tensão num ponto:

$T = f(P, \hat{n})$  ← a função do ponto e do plano de corte → pode ser definido por um vetor normal → pode ser definido pelos seus cossenos diretores.

Assim, o vetor tensão é igual ao produto entre a matriz de tensões e os cossenos diretores do vetor normal ao plano de corte.

$$\vec{\sigma} = \underbrace{[\sigma]}_{\text{matriz}} \cdot \underbrace{\hat{n}}_{\text{escalar}} = \text{escalar} \cdot \hat{n}$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

MéTODO:  $\text{dot}([\sigma] \cdot \hat{n}, \hat{n}) = \text{valor}$

Isto resulta do facto de  $\sigma_n$  o valor da tensão normal para um plano de corte definido por um eixo director relativo ao referencial principal, e dado por

$$\sigma = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

$$\sigma = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} l_1 \sigma_1 \\ m_1 \sigma_2 \\ n_1 \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

Esta  $\sigma_{oct}$  é igual para todos os faces do octaedro.

> Em MS, muitas vezes se vê escrito  $T^2 = C^2 + \sigma^2$  que na verdade quer dizer

$$\|\mathbf{T}\|^2 = \|\mathbf{C}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}\|^2$$

### ESTADO PLANO DE TENSÃO

> 3 maneiras de axar a matriz de tensões num plano rodado em relação ao original

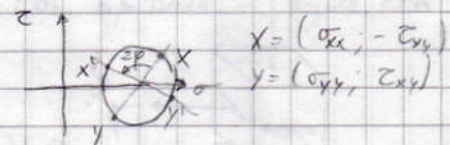
(A)  $[\sigma'] = [T_{SS1}] [\sigma] [T_{SS1}]^T$



$$[T_{SS1}] = \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

(B)  $\sigma_{xx'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$

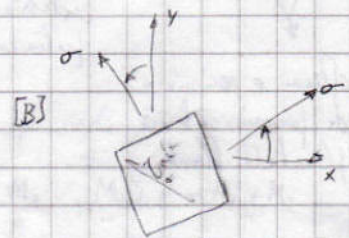
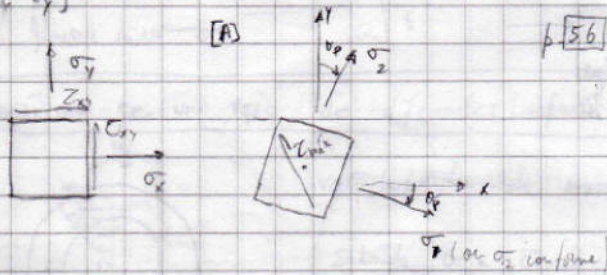
(C) Circulo de Mohr (nota 24)



Mais simples: A e C

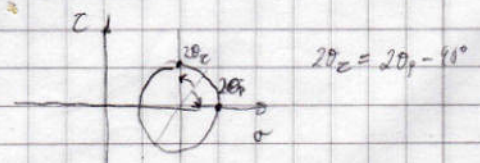
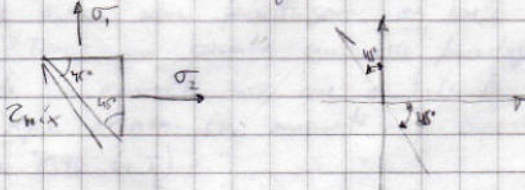
> Para axar as tensões principais e ângulo  $\alpha$  face a  $\alpha$  eixos coordenados

$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \rightarrow \text{sta } \alpha \rightarrow \text{mexu } \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_4 \rightarrow \sigma_5 \rightarrow \sigma_6 \rightarrow \sigma_7 \rightarrow \sigma_8 \rightarrow \sigma_9 \rightarrow \sigma_{10} \rightarrow \sigma_{11} \rightarrow \sigma_{12}$



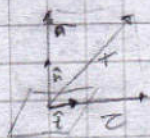
> Para axar  $\tau_{mix}$  e ângulo  $(\theta_c)$

$\theta_c = \theta_p - 45^\circ$  (no circ. de Mohr e tudo 24)



•  $\arccos x = \cos^{-1} x = \alpha$   
 •  $\arcsen x = \sin^{-1} x = \beta$

- Os cossenos diretores da tensão normal são os cossenos  $\alpha$  e  $\beta$  do normal ao plano
- Os cossenos diretores da tensão de corte são  $l, m, n$

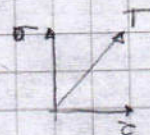


$\vec{l} = \{l, m, n\}$

$$\vec{T} = \vec{\sigma} + \vec{z}$$

$$\|\vec{T}\|^2 = \|\vec{\sigma}\|^2 + \|\vec{z}\|^2$$

$$T^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

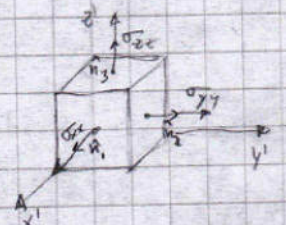


← notação simplificada

Tensões principais

> para todo ponto de um corpo, posso rotacionar até se obtiverem tensões normais

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Neste referencial  $S'$ , isso acontece logo os planos  $x'y'$ ,  $x'z'$  e  $y'z'$  são planos principais

independente do referencial adotado

cuja  $\sigma$  são as tensões principais



que formam um tríplice principal

sistema de eixos principal, que definem

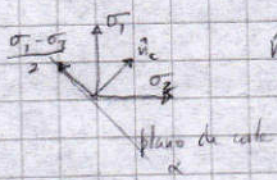
direções principais

+ em referencial principal

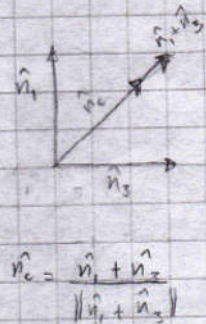
Tensão de Corte máxima

> além as tensões principais, a tensão de corte máxima é dada por metade da diferença entre a maior e a menor tensões principais

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \gamma_{max} = \epsilon_1 - \epsilon_3$$



$\hat{n}_c \rightarrow$  normal ao plano de corte (normalizado)



Tensões octaédricas

as  $\vec{T}_{oct}$  (8 no total) são dadas por  $\begin{cases} T_x = l\sigma_1 \\ T_y = m\sigma_2 \\ T_z = n\sigma_3 \end{cases}$  onde  $l, m, n$  podem ser  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\vec{T}_{oct} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{n}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{n}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{n}_3$$

- +++
- ++-
- +--
- 



• são também os cossenos diretores de  $\vec{T}_{oct}$ .

O valor destas coincide com o valor médio das tensões principais

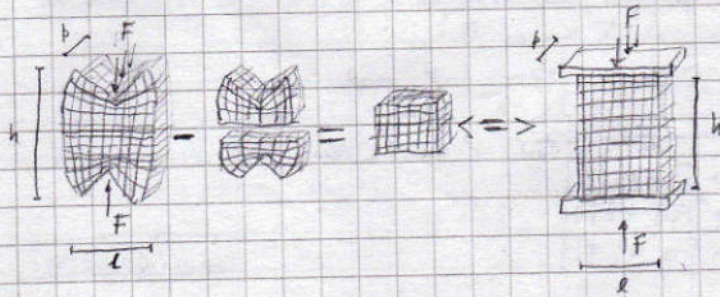
$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$C_{oct}^2 = T_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2 \quad (m)$$

$$C_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (m)$$

Notar: que os planos estão igualmente inclinados em relação às 3 direções principais. Em relação a esse se depende da inclinação do referencial principal em relação a esse

Princípio de Saint-Venant



> permite analisar diferentes formas de carga de uma mesma maneira, desde se se desconsidere a distribuição de tensões nas regiões próximas ao ponto de aplicação.

> as deformações em regiões do corpo afastadas da área de aplicação das forças, permanecerão essencialmente inalteradas.

pequena área

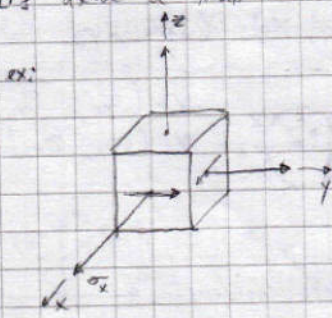
> Invariante: característica independente do referencial, ex: grandezas de um dado corpo.

$I_1, I_2$  e  $I_3$  designam-se por invariantes das tensões e o seu valor não se modifica quando a matriz (tensor) das tensões passa a estar definido noutra referencial (tal como as tensões principais, das quais os invariantes são funções)

$$I_1, I_2, I_3 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Calcular as tensões principais secundárias (num plano qq)

[1] achar a matriz de tensões para esse plano



ex:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

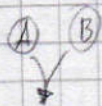
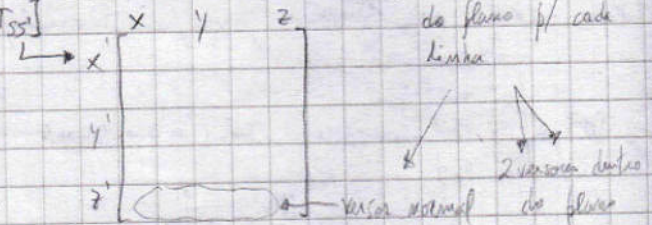
(A) plano  $yz$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

(B) plano qq  $ax + by + cz + d = 0$

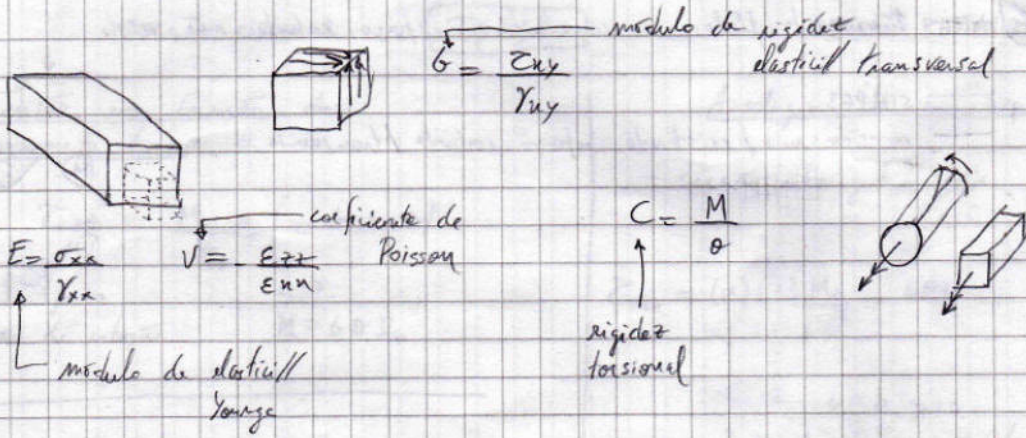
$$[\sigma'] = [T_{SS}][\sigma][T_{SS}]$$

[1.1] encontrar 3 vetores do plano p/ cada linha



contar as linhas relativas ao eixo  $oz$  (não pertencem ao plano  $\Rightarrow$  não interessam)

aplica o raciocínio da página anterior p/ estado plano



Momentos de inércia

$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$

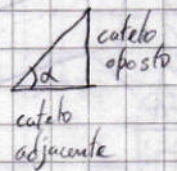
Rótulas

$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Foga paralela ao eixo da viga mas excêntrica

tangente

Centroide: centro geométrico



$\tan \alpha = \frac{c.o.}{c.a.}$

Põe A em função de b

$A = (\dots) \cdot b$   
 $A = K \cdot b$

Momento torsor em função de espessura e ângulo de torção / m

$M_t = G \cdot \theta \cdot t$

Dividir = multiplicar -!

$a \cdot \frac{c}{k} = b$

Eixo neutro

definição:  $\sigma_{normais} = 0$

$a = b \cdot \frac{k}{c}$

Momento máximo de um veio de diferentes partes / materiais



vai depender do momento mínimo que cada parte absorve

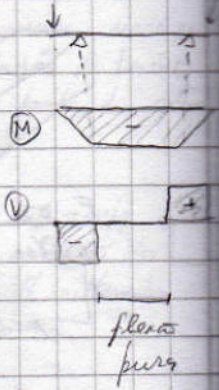
Sequendo  $G$  e  $Z_{adm}$ , se  $M_1 < M_2$   $M_{total} = M_1 + M_2$

momentos máximos que cada parte absorve antes da partir

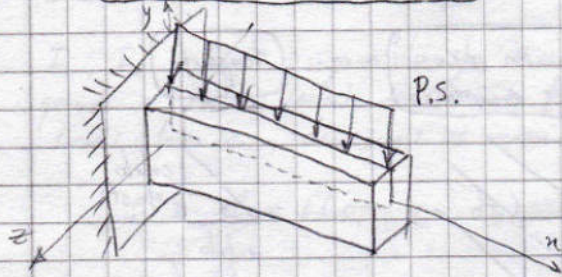
Cada parte absorve uma porcentagem ou parte de  $M_{total}$ . Temos que garantir que esse porcentagem não excede o momento máx que a parte do veio consegue absorver. Esse momento máx depende de  $G$  e  $Z_{adm}$  (e  $I$ )

**FLEXÃO** — PURA — 1 momento flexor a constante, esforço cortante não existe

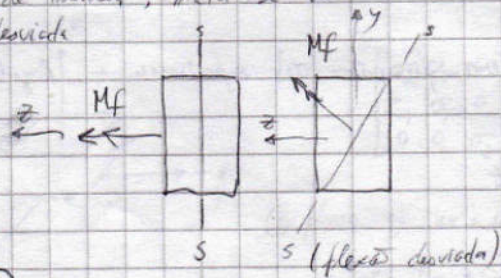
— SIMPLÉS — considerando / existindo esforço cortante / transversão



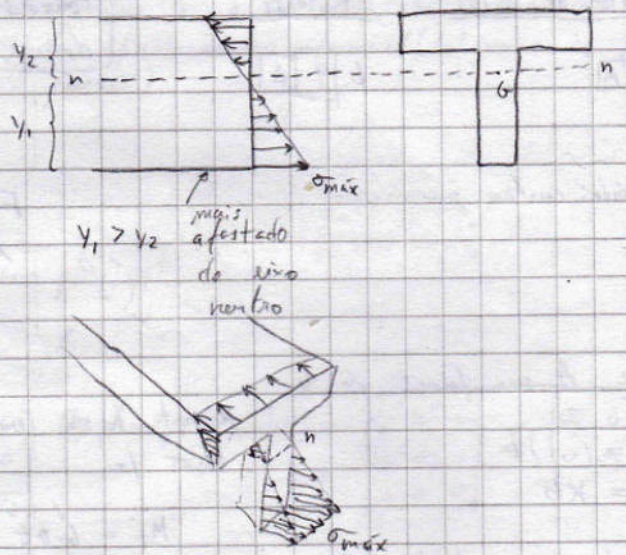
**PLANO DE SOLICITAÇÕES**



Se  $z$  e  $n$  não forem eixos principais centrais de inércia, trata-se de flexão desviada



**SEÇÕES ASSIMÉTRICAS EM FLEXÃO A**



**TORÇÃO**

— No dimensionamento de vigas à torção há 2 condições a impor

relativa / à  $Z$  e  $Z_{\text{adm}}$   $Z = \frac{M R}{I}$   
relativa / ao ângulo de torção  $M \leq G \theta I$

**Momento estático**



$S_A = \text{Área} \cdot d$  ( $G \leftarrow$  centróide da área)

(cota A)



$S_B = \text{Área} \cdot d$

(cota B)

Produto entre a área acima da seção onde se quer calcular e a distância entre o e.n. do elemento todo e o centróide dessa área.

$$R = \text{raio máximo}$$

SECÇÃO CIRCULAR

**TORÇÃO**

SECÇÃO RETANGULAR

Tensão em função do momento torçor

$$\tau_{z\theta} = \frac{M_t \cdot r}{I_z} \quad (= 6 \cdot r \cdot \theta)$$

se z for o eixo de torção  $\Leftrightarrow M = 6 \theta I_z$

Momento de inércia polar



$$I_p = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

Tensão de corte máxima

$$\tau_{máx} = \frac{M_t \cdot R}{I_p}$$

tubo circular oco

$$I_p = \frac{\pi (R_o^4 - R_i^4)}{2} = I_{\text{vaco}} \text{ parede fina}$$



Tubo de parede fina

$$I_p = 2\pi R_m^3 \cdot e \quad \tau = \frac{M_t \cdot R_m}{I_p}$$

↑ espessura

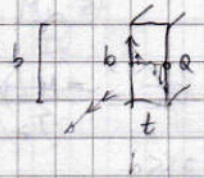
Ângulo de deflexão de torção

$$\phi = l \cdot \theta \quad \gamma = r \cdot \theta$$

Analogia da membrana

$$\tau_{\theta z} = -\tau_{z\theta}$$

- secção retangular



$$\tau_{máx} = (\alpha) (3) \frac{M_t}{b t^2} = 6 \theta t$$

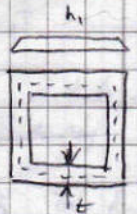
$$L \cdot \alpha \cdot \frac{b}{t} > 10$$

se  $\frac{b}{t} \leq 10$  (fator de correção) tabela p. 138

$$C = \frac{M_t}{\theta} = (\chi) 6 b t^3 \quad \text{caso } \frac{b}{t} = 5 \Rightarrow \chi = 0,29$$

rigidez torsional

- secção tubular de parede fina



$$M_t = 2 A t \tau$$

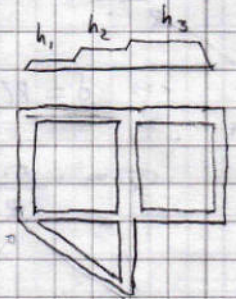
• se espessura constante

$$\frac{M_t}{\theta} = \frac{4 b A^2 t}{L}$$

L perímetro

linha média (+ raio externo + espessura) exterior (+ raio interno)

- secção multilobular



$$p A_i = T \int \frac{\Delta h_i}{c_i} ds$$

área dentro → ao longo do perímetro

$$M_t = 2 \cdot \sum A_i h_i$$

volume de corte da membrana

$$\tau = \frac{\Delta h}{t} \Rightarrow \tau_{máx} = \left( \frac{\Delta h}{t} \right)_{máx} = \frac{\Delta h_{máx}}{t_{mín}}$$

$$\frac{b}{t} = 260$$

Dica: para variáveis / valores muito usados no sto →

# FLEXÃO

## Centróide

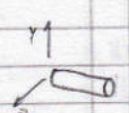
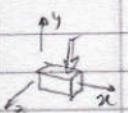
$$y_0 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \quad (\text{dist. segundo } y)$$

## Flexão pura

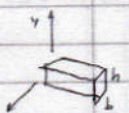
$$(1) \sigma_x = \frac{-M \cdot y}{I_z}$$

resistência à flexão

distância ao eixo neutro segundo y

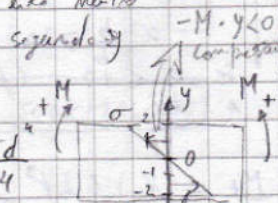


$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$



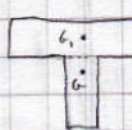
$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h b^3}{12}$$



$-M \cdot (-y) > 0$   
tração

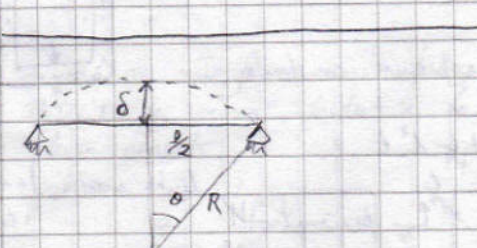
## Momentos de inércia e Teorema de Steiner



$$I_{00} = I_{1,01} + A_1 \bar{b}_1 \bar{b}_1^2$$

M.I. do corpo é volta de b

$$I_0(\text{total}) = I_{10} + I_{20}$$



$$\frac{R - \delta}{R} = \cos \theta \rightarrow \arccos\left(\frac{R - \delta}{R}\right)$$

raio de curvatura

$$\Leftrightarrow \delta = R(1 - \cos \theta)$$

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot y}{R} \quad (2)$$

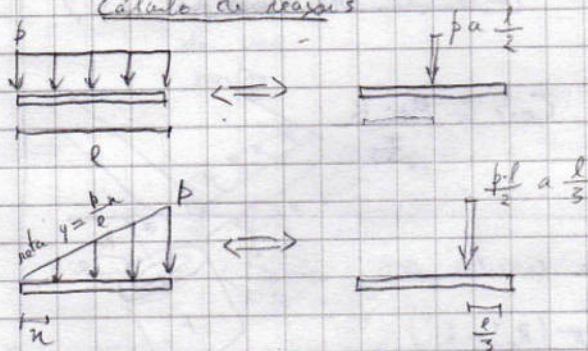
$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$

vem de relação com (1) com (2) igualando sigma

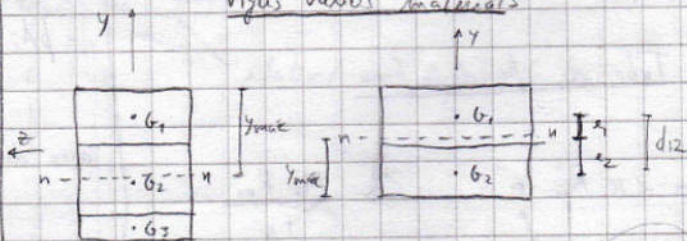
Lembrar que:  $\sigma_x = E \epsilon_x$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{R}$$

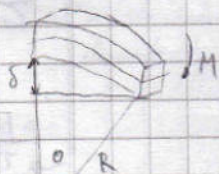
## Cálculo de reações



## Vigas vários materiais



$$e_1 - e_2 = d_{12} \quad e_1 = \frac{E_2 A_2 d_{12}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$



$$\sigma_x = \frac{-M E_1 y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

n.º de materiais



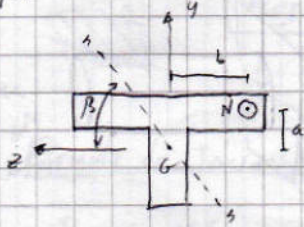
lombrea

bico da flacha  
eixos da flacha

Nº força de tração

# FLEXÃO DESVIADA

① Esforço normal desviado



$$M_z = Na$$

$$M_y = -Nb$$

Sobreposição de esforços

distância de P ao eixo neutro

$$\sigma_p = \underbrace{\frac{N}{A_{\text{area}}}}_{\sigma_n} - \underbrace{\frac{M_z \cdot y}{I_z}}_{\sigma_f} + \underbrace{\frac{M_y \cdot z}{I_y}}_{\sigma_f}$$

$\sigma_n$  - tensão devida ao esforço normal

$\sigma$  num ponto q, P

$\sigma_f$  - tensão devida à flexão (máximas)

→ Nota: as tensões críticas encontram-se nos pontos mais afastados do eixo neutro.

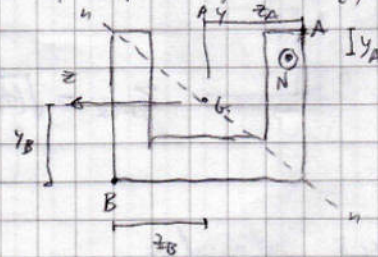
Saber tensão normal máxima devida à flexão ( $\sigma_f$  max)

no caso da flexão desviada decorre de uma força normal

1º saber  $\frac{-M_z}{I_z} \left( = -\frac{Na}{I_z} \right)$  e  $\frac{M_y}{I_y} \left( = \frac{Nb}{I_y} \right)$

2º  $\sigma_f = 0$  (condição válida no eixo neutro) e por a eq.  $\sigma_f$  na forma  $\frac{y}{z} = \frac{c. \text{oposto}}{c. \text{adj.}} = \frac{y}{z}$

3º Sabendo, calcular  $\sigma_f$  para essas pontos, substituindo as coordenadas de acordo com →



onde A e B são os pontos + afastados do eixo neutro.

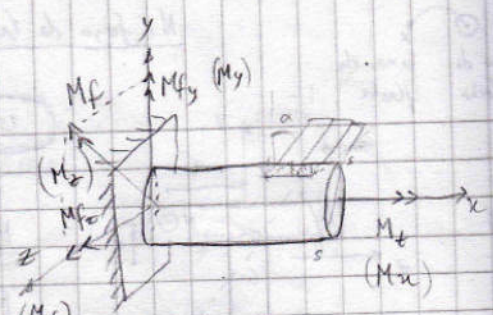
A tensão máxima total será a soma algébrica

de  $\sigma_n + \sigma_f$  max

(negativo se compressão, positivo se tração)

②

**TORÇÃO + FLEXÃO**



- viga seção circular ○

- direção do eixo neutro mesma do momento fletor ( $M_f$ )
- pontos críticos:
  - devidos à flexão são os + afastados do eixo neutro ( $\sigma_{max}$ )
  - devidos à torção são os na periferia ( $\tau_{max}$ )

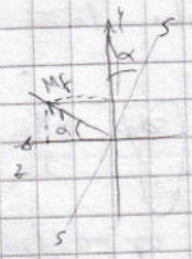
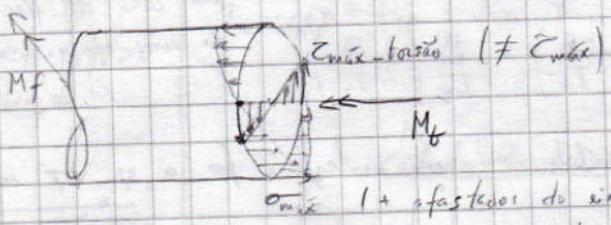
As tensões normais vêm do momento fletor

As tensões de corte vêm do momento torção (cisalhamento/torção)

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

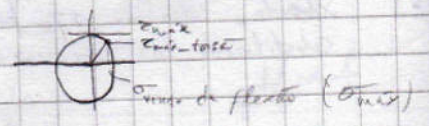
$$\tau = \frac{M_x \cdot R}{I_x}$$

para  $I_z = I_y$



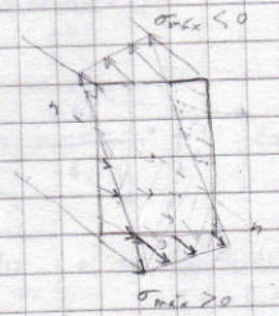
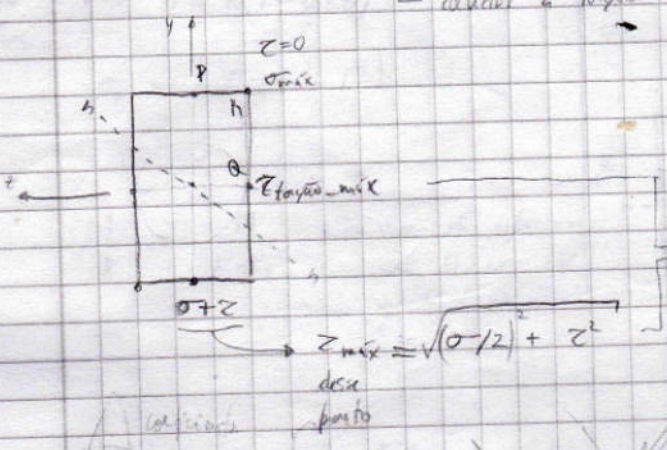
mas  
lemb?

$$z_{max} = \sqrt{(0/2)^2 + z_{max-torção}^2}$$



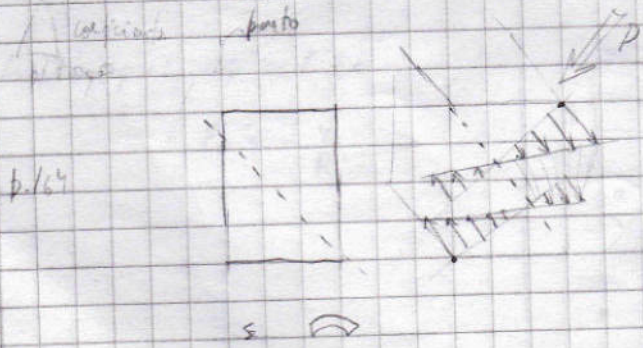
- viga seção retangular

- direção do eixo neutro - como se houvesse flexão (desviada)
- pontos críticos:
  - devidos à flexão são os + afastados do eixo neutro ( $\sigma_{max}$ )
  - devidos à torção na diagonal



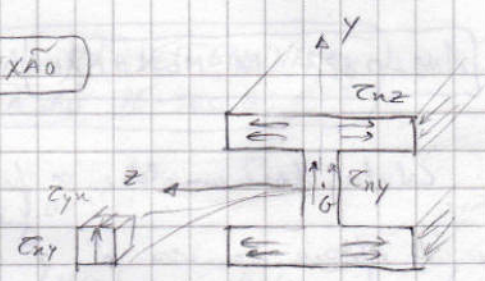
$$z_{max} = \sqrt{(0/2)^2 + z^2}$$

deix  
ponto

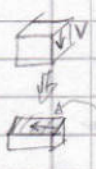


# ESFORÇO CORTANTE + FLEXÃO

(transverso)



## Fórmula de Jouravski



$$R = \frac{VS}{I}$$

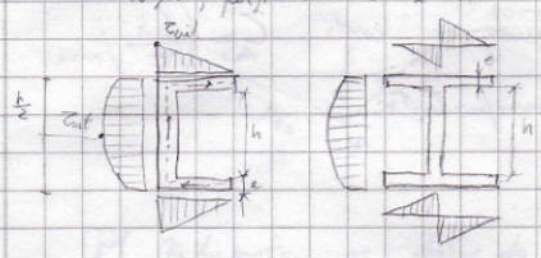
↑  
força [N]

$$\tau = \frac{VS}{I \cdot e}$$

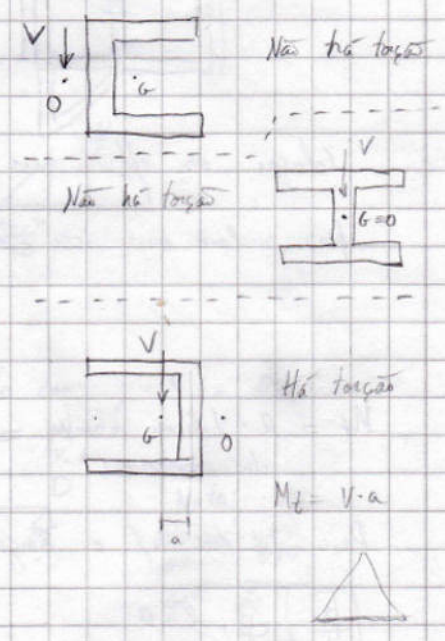
↑ espessura na seção

Nota: quando o esforço transversal é aplicado no centro de torção/corte esse esforço não gera torção.

Distribuição das tensões de corte, carga vertical no centro de torção, perfil em V e I



$$\tau_{max} / \tau_{min} \approx \frac{V}{A_{alma}}$$

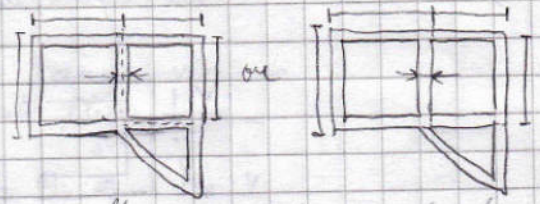


# ANALOGIA DA MEMBRANA

Calcula por um dos 3 perímetros,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ext} \\ \text{méd.} \\ \text{interio} \end{array} \right.$

A espessura a usar é a espessura que se verifica no topo

Para perímetro exterior, os valores a usar p/ áreas, compridos e espessuras são



Colocar as alturas em função de  $\frac{p}{t}$ . Tende em conta  $\sigma_{\text{max}} = \left( \frac{\Delta h}{t} \right)_{\text{máx}}$

para o lado onde isso acontecer usar os valores correspondentes.

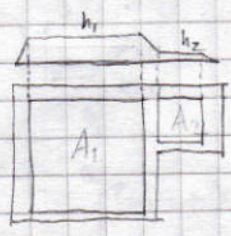
$$M_t = 2 \cdot \text{Volume debaixo} = 2 \cdot (A_1 h_1 + A_2 h_2)$$

da membrana

Para entrar p/ o ângulo de torção

$$\left( \frac{p}{t} \right) \approx 260$$

Nota: Área  $\propto h$

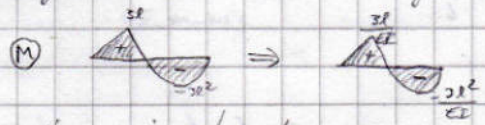


# MÉTODOS DA VIGA CONJUGADA P/ DETERMINAÇÃO DA FLECHA E A ROTAÇÃO DE SEÇÕES

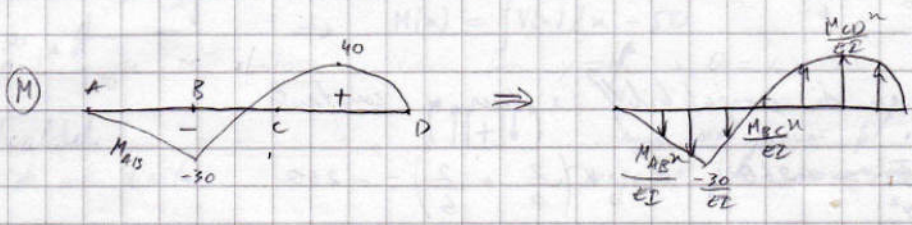
Procedimentos:



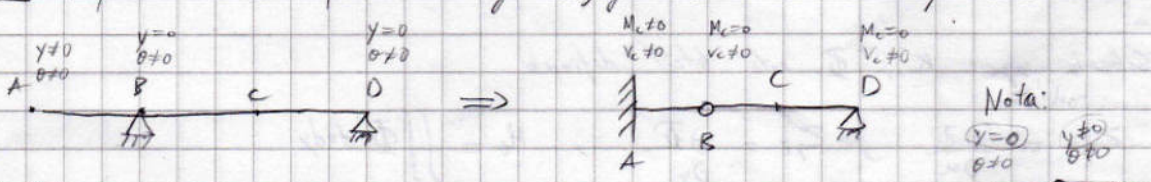
1º construir o diagrama de momentos da viga real  $M(x)$ , multiplicar os valores por  $\frac{1}{EI}$



2º considerar a viga conjugada q' o mesmo comprimento da viga real e tomar os momentos  $\frac{M(x)}{EI}$  como sendo a carga conjugada  $q_c$ .

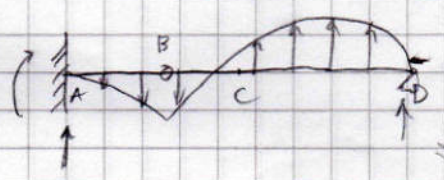
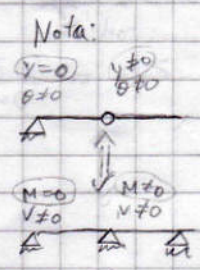


3º Representar os apoios da viga conjugada de acordo com  $y=0$  e  $\theta=V_c$



4º Calcular p/ a viga conjugada

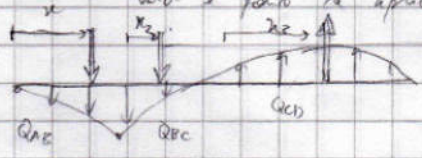
- reações nos apoios
- $V_c$  para a seção que a quer rotações ( $\theta$ )
- $M_c$  " " " " " " " " flecha ( $y$  ou  $\delta$ )



para este exemplo:  
 $M_A = \delta_A$   
 $V_B = \theta_B$

Nota: por simp as setas e apoiar p/ viga p/ ã confundir os sinais

Nota: Para calcular os momentos e reações da viga conjugada, é necessário achar a velocidade e ponto de aplicação das cargas distribuídas



O ponto de aplicação é dado pela posição do centroide dessa área.

A força é dada pela área de base da função mais os valores em q e válida

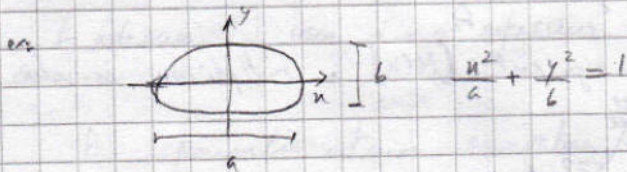
$$F = \frac{\int_0^1 Q_{AB} x dx}{\int_0^1 Q_{AB} dx}$$

No mesmo caso começa sempre nos 0 por isso o num de 0

$$\int_0^1 Q_{AB} dx, \int_0^1 Q_{BC} dx, \int_0^2 Q_{CD} dx$$

## TEORIA SAINT-VENANT VEIO SEÇÃO ARBITRÁRIA

1º Definir as condições fronteira da função que define a seção



2º Definir função  $\Phi$ , igualando a zero a condição fronteira e adicionando uma constante

$$\Phi = k \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

3º Substituir na eq. de compatibilidade e tirar a constante

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = -260$$

$$k \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -260$$

$$2k \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -260 \Rightarrow k = -60$$

4º Sabendo agora  $k$ ,  $\Phi$  está total definido

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad M_x = \iint \Phi \, dx \, dy$$

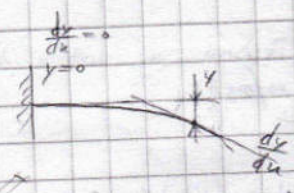
# MÉTODO DA INTEGRAÇÃO ELÁSTICA

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{\text{segmento}}}{EI}$$

→ para cada segmento fazer

$$\frac{1}{EI} \int M(x) dx = \frac{1}{EI} (\dots + c_1 x) = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{1}{EI} \int \dots c_1 x dx = \frac{1}{EI} (\dots \frac{c_1 x^2}{2} + c_2) = y \quad (2)$$



Fronteira da esq.

fronteira da d.

$$x=0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x=l$$

$$y=0$$

Substitua em (1) e tire  $c_1$

substitua em (2) e tire  $c_2$

para flecha e rot. em  $x=l$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = \delta$$

rotação em  $x=0$

flecha em  $x=0$